



B.Sc (Part-I) 2021-22

Model Test Paper

MATHEMATICS

Paper First

(Algebra and Trigonometry)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) निम्नलिखित आव्यूह का प्राथमिक संक्रियाओं (रूपान्तरणों) का प्रयोग कर प्रतिलोग ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Use only elementary operations (transformation) and find the inverse of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (ब) आव्यूह A के आइगेन मान तथा संगत आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine the eigen values and the corresponding eigen vectors of the matrix A, where :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- (स) कैली-हैमिल्टन प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।
State and prove Cayley-Hamilton theorem.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) निम्नलिखित समीकरणों का उभयनिष्ठ हल आव्यूह विधि से ज्ञात कीजिए :

$$\begin{aligned} x + y + z &= -3 \\ 3x + y - 2z &= -2 \\ 2x + 4y + 7z &= 7 \end{aligned}$$

Find common solution of the following equations by matrix method :

$$\begin{aligned} x + y + z &= -3 \\ 3x + y - 2z &= -2 \\ 2x + 4y + 7z &= 7 \end{aligned}$$

- (ब) भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए जबकि $x^5 - 3x^4 + x^3 - 8x - 135$ को $x - 4$ से भाग दिया जाता है।

Find the quotient and remainder when $x^5 - 3x^4 + x^3 - 8x - 135$ is divided by $x - 4$.

- (स) यदि समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के दो मूलों का योग तीसरे मूल के बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$p^3 - 4pq + 8r = 0$$

If the sum of two roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ is equal to the third root, then prove that :

$$p^3 - 4pq + 8r = 0$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) सिद्ध कीजिए कि यदि $f : A \rightarrow B$ एकैकी आच्छादक हो, तो $f^{-1} : B - A$ भी एकैकी आच्छादक होगा।

Prove that if $f : A \rightarrow B$ is one-one onto, then $f^{-1} : B - A$ is also one-one onto.

- (ब) सिद्ध कीजिए कि समूह G के अरिक्त उपसमूच्य H के उपसमूह होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि :

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

Prove that the necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G to be a subgroup of G is :

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

- (स) लैग्रांज के प्रमेय को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Lagrange's theorem.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) यदि f समूह G का समूह G' में एक अन्तर्क्षेपी समाकारिता है, तो सिद्ध कीजिए कि f का कर्नल K, G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

If f is a homomorphism of a group G into group G' , then prove that the kernel K of f is a normal subgroup of G .

- (ब) सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ एक उपवलय होता है।

Prove the intersection of two subrings is a subring.

- (स) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।

Prove that every finite integral domain is a field.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) दिखाइए कि :

$$i \log \frac{x-i}{x+i} = \pi - 2 \tan^{-1} x$$

Show that :

$$i \log \frac{x-i}{x+i} = \pi - 2 \tan^{-1} x$$

- (ब) सिद्ध कीजिए कि :

$$\tanh^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Prove that :

$$\tanh^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- (स) श्रेणी का योग कीजिए :

$$\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2^2} \sin 3\alpha + \dots \dots \infty$$

Sum the series :

$$\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2^2} \sin 3\alpha + \dots \dots \infty$$